

Problème 480 – Lost et la suite de Valenzetti

Niveaux : Première (Spécialité Maths)

Chapitres : Suites numériques, Polynômes du second degré

Inédit, publié le 30/08/2024



Il y a exactement 20 ans, « Lost » faisait partie de ces premières séries qui ont vraiment captivé le public, et reste pour beaucoup une des meilleures séries jamais créées (NB : *il est peut-être temps de la découvrir ou de la revoir ?*). Dans cette histoire très captivante qui aura duré 6 saisons, on suit les survivants d'un crash d'avion sur une île déserte et mystérieuse dans le Pacifique sud. L'histoire mêlant science-fiction et surnaturel amène les personnages à trouver des éléments étranges, parmi lesquels on trouve les fameux nombres qui réapparaissent partout : 4, 8, 15, 16, 23, 42.

Selon la série, ces nombres doivent résoudre « l'équation de Valenzetti » qui est censée, bien sûr de manière purement fictive, prédire l'apocalypse. Nous imaginons pour ce problème qu'un des héros de l'histoire, Jack Shephard, comprend longtemps après les événements de la série que ces nombres cachent en réalité une suite qui donnent une autre interprétation de l'équation. Nous l'appellerons, pour ce problème, « la suite de Valenzetti ».

Celle-ci, que l'on appelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'abord définie par ses six premiers termes basés sur les fameux nombres : $v_0 = 4$; $v_1 = 8$; $v_2 = 15$; $v_3 = 16$; $v_4 = 23$ et $v_5 = 42$. Puis, pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+6} = v_n + 42$.

Dans l'ensemble de ce problème, on pourra sans la justifier utiliser la formule :

Somme U_{n-1} des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) débutant à un terme d'indice u_0 :

$$U_{n-1} = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

1) Montrer que la suite de Valenzetti n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) a) Calculer v_8 , v_{15} , v_{16} , v_{23} et v_{42} .

b) On associe à tout $n \in \mathbb{N}$ les valeurs q_n et r_n , qui sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6.

En justifiant le raisonnement, exprimer v_n en fonction de q_n et r_n .

3) On appelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que $a_0 = v_0$ et telle que pour tout entier naturel n : $a_n = v_{6n}$.

a) Montrer que (a_n) est une suite arithmétique.

b) Exprimer en fonction de n , avec $n \geq 1$, la somme A_{n-1} des n premiers termes de la suite (a_n) .

4) En vous appuyant sur d'autres suites arithmétiques similaires à (a_n) , calculer une expression de la somme V_{6n-1} , avec $n \geq 1$, des $6n$ premiers termes de la suite (v_n) .

5) On appelle $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que $m_0 = 108$ et $m_{n+1} = m_n + 252$.

a) Exprimer en fonction de n la somme M_{n-1} , avec $n \geq 1$, des n premiers termes de la suite (m_n) .

b) Retrouver que $V_{6n-1} = M_{n-1}$.

6) Jack Shephard pense comprendre grâce à cette suite que l'apocalypse se produira quand la somme des $6n$ premiers termes de la suite de Valenzetti sera pour la première fois supérieure au produit des 6 nombres initiaux, sachant que n est le nombre d'années écoulées après le début de l'année 1962, l'année de découverte de l'équation de Valenzetti.

Déterminer, en justifiant votre calcul, en quelle année se produira l'apocalypse selon la suite de Valenzetti.